最优化理论与方法主要知识点的例题

2023 至 2024 学年第 1 学期

学生姓名：曹陆铖
学院专业班级：数学与统计学院数学与应用数学强基 2 班
学生学号：20210684

重庆大学数学与统计学院

1 线性规划主要知识点

1.1 单纯形法+大 M 法、两阶段法

1.1.1 单纯形法

例 1.6 用单纯形方法求解

$$\max z=-\frac{5}{2}x_1+\frac{13}{2}x_2+\frac{5}{2}x_3+x_4-x_5$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}-x_1+x_2+x_3=2\\ x_1+2x_2+x_4=10\\ 3x_1+x_2+x_5=15\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}$$

例 1.7 用单纯形方法求解

$$\min z = -2x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - 3x_2 \leqslant 5 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.1.2 大 M 法

例 1.8 用大 M 法求解

$$
\max z = 3x_1 - x_2 - 2x_3
$$

$$
\text{s. t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}
$$

例 1.9 用大 M 法求解

$$
\max z = 2x_1 + x_2
$$

$$
\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 4 \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
$$

1.1.3 两阶段法

例 1.10 利用两阶段法求解线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = -5x_1 - 21x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \geqslant 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

例 1.11 利用两阶法求解例 1.9 的线性规划问题.

$$
\begin{aligned}
&\max z = 2x_1 + x_2 \\
&\text{s.t. } \begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 4 \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

1.2 对偶问题 + 互补松驰定理

1.2.1 对偶问题

1.2.2 互补松驰定理

1.3 对偶单纯形法

例 2.3 求解线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&\min z = 5x_1 + 21x_3 \\
&\text{s. t. } \begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \geqslant 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

1.4 整数线性规划中割平面法、分支定界法

1.4.1 整数线性规划中割平面法

例 3.4 利用割平面方法求解例 3.1 的整数线性规划问题.

$$\max z = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 13 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

1.4.2 分支定界法

例 3.5 利用分支定界法求解例 3.1 的整数线性规划问题.

$$\max z = 6x_1 + 4x_2$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leqslant 13 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 7 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

2 非线性规划主要知识点

2.1 下降方向、可行下降方向

定义 5.5 若搜索方向 $\boldsymbol{p}_k$ 满足 $f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}+t_k\boldsymbol{p}_k\right)<f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$, 则称 $\boldsymbol{p}_k$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 处的下降方向 (descent direction).

定理 5.5 设 $f(\boldsymbol{x})$ 可微, 向量 $\boldsymbol{p}_k$ 为点 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 处的下降方向的充分必要条件为 $\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_k<0$.

2.2 凸集、凸函数、凸规划

定理 5.2 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为非空开凸集, $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 D 上的可微函数, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 是凸函数的充分必要条件是

$$f(\boldsymbol{y})\geqslant f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}),\quad \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$$

定理 5.3 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是非空开凸集, $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 D 上的二次可微函数, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 是凸函数的充分必要条件是 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 的每一点处的 Hesse 矩阵都半正定.

定理 5.4 (1) 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为非空开凸集, $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 D 上的可微函数, 则 $f(x)$ 是严格凸函数的充分必要条件是 $f(\boldsymbol{y})>f(\boldsymbol{x})+\nabla f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-x)(\forall x,y\in D$ 且 $x\neq y)$.

(2) 设 $\boldsymbol{D}\subset\mathbf{R}^n$ 是非空开凸集, $f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 D 上的二次可微函数, 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 内每一点 $\boldsymbol{x}$ 处的 Hesse 矩阵都正定, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 是 D 上的严格凸函数.

2.3 无约束优化的一阶和二阶最优性条件

定理 5.6 (一阶必要条件) 设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}^*$ 的某个邻域内具有连续的偏导数, $\boldsymbol{x}^*$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的局部最优解的必要条件是 $\nabla f\left(\boldsymbol{x}^*\right)=0$.

定理 5.7 (二阶必要条件) 设 $f(x)$ 在 x^* 的某个邻域内具有连续的二阶偏导数, 则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的局部最优解的必要条件是 $\nabla f\left(\boldsymbol{x}^*\right)=0$ 且 $\nabla^2 f\left(\boldsymbol{x}^*\right)$ 半正定.

定理 5.8 (二阶充分条件) 设 $f(x)$ 在 x^2 的某个邻域内具有连续的二阶偏导数, 若 $\nabla f\left(\boldsymbol{x}^*\right)=0$ 且 $\nabla^2 f\left(\boldsymbol{x}^*\right)$ 正定, 则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的严格局部是最优解.

定理 5.9 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的凸函数且具有连续的偏导数, 则 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的全局最优解的充分必要条件是 $\nabla f\left(x^*\right)=0$.

2.4 正定二次函数的一维搜索、Newton 切线法、黄金分割法（0.618 法）

2.4.1 Newton 切线法

2.4.2 黄金分割法（0.618 法）

2.5 最速下降法、Newton 法、拟 Newton 法(DFP、BFGS)、共轭梯度法（FR、PRP）

2.5.1 最速下降法

例 5.6 用最速下降法求解例 5.5 的无约束非线性规划问题. 例 5.5 取定步长 $t = 2$, 初值 $x^{(0)} = (2, 2)^{\mathrm{T}}$, 求解

$$\min f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 25x_2^2$$

2.5.2 Newton 法

例 5.7 用 Newton 法求解

$$\min f(x) = x_1^2 + 25x_2^2$$

例 5.8 用 Newton 法求解

$$\min f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2)^2 x_2^2 + (x_2 + 1)^2$$

2.5.3 阻尼 Newton 法

习题 5.6 用阻尼 Newton 法求解如下问题, 取初值 $x^{(0)} = (0,0)^{\mathrm{T}}$, 精度 $\varepsilon = 10^{-6}$, 并说明原因.

$$\min f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 - x_2$$

2.5.4 DFP 方法

$$\boldsymbol{H}_{k+1}=\boldsymbol{H}_k+\frac{\Delta\boldsymbol{x}_k\Delta\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}}{\Delta\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{g}_k}-\frac{\boldsymbol{H}_k\Delta\boldsymbol{g}_k\Delta\boldsymbol{g}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k}{\Delta\boldsymbol{g}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_k\Delta\boldsymbol{g}_k},\quad \boldsymbol{p}_{k+1}=-\boldsymbol{H}_{k+1}\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}\right)$$

例 5.9 用 DFP 方法求解

$$\min f(x)=x_1^2+2x_2^2-4x_1-2x_1x_2$$

2.5.5 BFGS 方法

2.5.6 FR 方法

例 5.10 利用 FR 方法求解

$$\min f(\boldsymbol{x})=x_1^2+2x_2^2-4x_1-2x_1x_2$$

2.6 Kuhn-Tuckcr 最优性条件

例 6.7 求解如下问题:

$$\min f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} g(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - x_2 \leqslant 0 \\ h(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

2.7 外罚函数法、内罚函数法

2.7.1 外罚函数法

例 6.8 求解如下问题:

$$\min f(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{6}$$
$$\text{s. t. } x_1 + x_2 - 1 = 0$$

2.7.2 内罚函数法

例 6.9 求解

$$\min f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}\left(x_1+1\right)^3 + x_2$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} 1 - x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

2.8 乘子法

2.8.1 等式约束问题的乘子法 (P-H 乘子法)

例 6.10 用乘子法求解

$$\min f(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{6}$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 - 1 = 0$$

2.8.2 不等式约束问题的乘子法 (Rockafellar 乘子法)

例 6.11 用 Rockafellar 乘子法求解

$$\min f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 2x_2^2$$

$$\text{s. t.} \quad 1 - x_1 - x_2 \leqslant 0$$

2.9 Frank-Wolfe 方法、Zoutendijk 方法（可行方向法）

2.9.1 Frank-Wolfe 方法

例 6.12 利用 Frank-Wolfe 方法求解

$$
\begin{array}{ll}
\min & f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\
\text{s.t.} & \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 + 5x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
\end{array}
$$

2.9.2 Zoutendijk 方法

例 6.13 用 Zoutendijk 方法求解

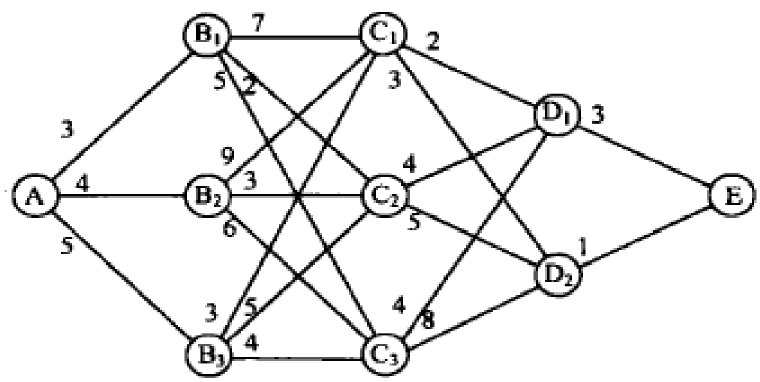
$$\min f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 + 5x_2 \leqslant 5 \\ -x_1 \leqslant 0 \\ -x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

3 动态规划、多目标规划主要知识点

3.1 最短路径问题的动态规划解法

例 8.1 (最短路径问题) 图 8.1 中, A, B, C, D, E 代表城市, 两个城市之间的连线代表道路, 数字代表路程, 求从城市 A 到城市 E 之间的最短路径.



3.2 利用动态规划方法求解机器生产分配问题、背包问题、非线性规划问题（教材-例 8.2、例 8.3、例 8.4、例 8.5）

例 8.2 (机器生产分配问题) 某工厂有 500 台机器生产 A, B 两种产品, 投人 x 台机器生产 A 产品, 纯收益为 $20x$ 万元; 投人生产 B 产品, 纯收益为 $15x$ 万元; 不投人生产就没有收人. 其年折损率分别为 0.6 和 0.2. 问在 4 年内, 应如何安排生产计划, 使 4 年末仍有 160 台机器保持完好, 并使收益最高.

例 8.3 (背包问题) 旅行者带一个能装 7 kg 的背包, 有三种物品可供选择, 第一种物品每件重 2 kg, 价值 45 元; 第二种物品重 3 kg, 价值 70 元; 第三种物品重 1 kg, 价值 15 元. 问各种物品应各取多少件放人背包, 才能使背包中物品的价值最高?

例 8.4 求解最优化问题

$$
\begin{aligned}
&\max f = 4d_1^2 - d_2^2 + 2d_3^2 \\
&\text{s. t.} \quad \begin{cases} 3d_1 + 2d_2 + d_3 \leqslant 9 \\ d_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

例 8.5 求解最优化问题

$$
\begin{aligned}
\max z \quad &= d_1 d_2^2 d_3 \\
\text{s.t.} \quad &\begin{cases} d_1 + d_2 + d_3 \leqslant 2 \\ d_1, d_2, d_3 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

3.3 多目标规划的绝对最优解、有效解、弱有效解概念及性质

3.3.1 绝对最优解

3.3.2 有效解

3.3.3 弱有效解

3.4 评价函数法（线性加权和法、极大极小法、理想点法）

3.4.1 线性加权和法

例 7.4 利用线性加权和方法求解例 7.2 的多目标规划问题. 解将“极大化问题”转换为“极小化问题”得多目标规划

$$\begin{array}{ll} \min & f_1(\boldsymbol{x}) = x_1x_2 \\ \min & f_2(\boldsymbol{x}) = -x_1x_2^2 \\ \text{s. t.} & \begin{cases} x_1^2+x_2^2=1 \\ x_1,x_2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

假设决策者给出强度函数的权系数为 0.7，重量目标的权系数为 0.3，则有单目标规划问题

$$\begin{array}{ll} \min u(f) = 0.3x_1x_2 - 0.7x_1x_2^2 & \\ \text{s. t.} \quad \begin{cases} x_1^2+x_2^2=1 \\ x_1,x_2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

解此约束非线性规划得 $\boldsymbol{x}^* = (0.5012, 0.8653)^{\mathrm{T}}$. 由于权向量 $\boldsymbol{\omega} > 0$, 故 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题的有效解.

3.4.2 极大极小法

例 7.5 利用极大极小法求解

$$\begin{aligned}&\min f_1(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 1\\&\min f_2(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2\\&\text{s. t.} \quad x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\end{aligned}$$

3.4.3 最短距离法

例 7.6 用最短距离法求解如下多目标线性规划问题:

$$\begin{aligned}\max \quad & f_1(\boldsymbol{x}) = -3x_1 + 2x_2\\\max \quad & f_2(\boldsymbol{x}) = 4x_1 + 3x_2\\\text{s. t.} \quad & \begin{cases}2x_1 + 3x_2 \leqslant 18\\2x_1 + x_2 \leqslant 10\\x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}\end{aligned}$$