渲染方程的概率解释

曹陆铖 重庆大学大数据与软件学院

2024 年 12 月 12 日

在勒贝格积分的框架下，渲染方程可以表示为：

$$L_o(x,\omega_o) = L_e(x,\omega_o) + \int_\Omega f_r(x,\omega_i,\omega_o)L_i(x,\omega_i)(\omega_i \cdot n)\,\mathrm{d}\lambda(\omega_i).$$

1 各项解释

- $L_o(x,\omega_o)$：在点 x 处，沿着出射方向 ω_o 的出射辐射亮度（Outgoing Radiance）。
- $L_e(x,\omega_o)$：在点 x 处，沿着方向 ω_o 的自发辐射亮度（Emitted Radiance）。对于非发光表面，此项通常为零。
- 积分符号 $\int_\Omega$：表示在半球 Ω 上对所有可能的入射方向 ω_i 的勒贝格积分。Ω 是单位半球面 $\mathbb{S}^2_+$，即以表面法线 n 为基准的所有朝向上半球的方向集合。

$$\Omega = \mathbb{S}^2_+ = \{\omega_i \in \mathbb{R}^3 \mid \|\omega_i\| = 1, \omega_i \cdot n \geq 0\}$$

- $f_r(x,\omega_i,\omega_o)$：双向反射分布函数（BRDF），描述了入射方向 ω_i 的光如何被表面反射到出射方向 ω_o。
- $L_i(x,\omega_i)$：在点 x 处，沿着入射方向 ω_i 的入射辐射亮度（Incoming Radiance）。
- $(\omega_i \cdot n)$：入射方向与表面法线的点积，表示入射光线与表面法线之间的夹角余弦。
- $\mathrm{d}\lambda(\omega_i)$：这里的测度 λ 是半球面上的面积测度。

2 使用大数定律进行蒙特卡洛估计

在渲染方程的基础上，为了对反射光进行有效的采样，我们需要引入概率论中的随机变量概念。随机变量 X 是一个从样本空间到目标空间的可测函数。

在本情境下，给定一个定义在概率空间 $(S,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的随机变量 $X : S \to \Omega$，其中 Ω 是半球方向空间，X 将概率测度 $\mathbb{P}$ 推到 Ω 上，从而定义出推前测度 μ:

$$\mu(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\Omega).$$

如果该推前测度 μ 关于半球上的面积测度 λ 是绝对连续的，那么根据 Radon-Nikodym 定理，存在一个概率密度函数 $p(\omega_i)$ 满足：

$$\mathrm{d}\mu(\omega_i) = p(\omega_i)\,\mathrm{d}\lambda(\omega_i).$$

给定可测函数

$$f(\omega_i) = f_r(x, \omega_i, \omega_o) L_i(x, \omega_i)(\omega_i \cdot n),$$

假设 $\mathbb{E}_\mu \left[\left| \frac{f(\omega_i)}{p(\omega_i)} \right| \right] < \infty$。

定义随机变量

$$Y(\omega_i) := \frac{f(\omega_i)}{p(\omega_i)}.$$

则根据期望的定义，有

$$\mathbb{E}_\mu[Y] = \int_\Omega Y(\omega_i)\,\mathrm{d}\mu(\omega_i) = \int_\Omega \frac{f(\omega_i)}{p(\omega_i)} p(\omega_i)\,\mathrm{d}\lambda(\omega_i) = \int_\Omega f(\omega_i)\,\mathrm{d}\lambda(\omega_i).$$

现从分布 μ 独立同分布抽样 $X_1, X_2, \ldots, X_N$，其中每个 X_i 都有密度 p，并构造蒙特卡洛估计量

$$\hat{I}_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(X_i)}{p(X_i)}.$$

由于 X_i 是 i.i.d. 随机变量，并且 $\mathbb{E}_\mu[|Y|] < \infty$，强大数定律 (Strong Law of Large Numbers) 保证了随着样本数 $N \to \infty$，有

$$\hat{I}_N \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}_\mu[Y] = \int_\Omega f(\omega_i)\,\mathrm{d}\lambda(\omega_i),$$

即以概率 1 收敛于原积分值。

3 通过方差选择密度函数 p

蒙特卡洛估计的误差通常用方差来衡量。设

$$\mathrm{Var}_\mu(Y) = \mathbb{E}_\mu[Y^2] - (\mathbb{E}_\mu[Y])^2.$$

由中心极限定理知，当 N 足够大时，

$$\sqrt{N}(\hat{I}_N - \mathbb{E}_\mu[Y]) \approx \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}_\mu(Y)),$$

即估计量 $\hat{I}_N$ 的标准差约为 $\sqrt{\mathrm{Var}_\mu(Y)/N}$。因此，为了减少蒙特卡洛估计的方差，我们希望通过恰当地选择 $p(\omega_i)$ 来尽可能降低 $\mathrm{Var}_\mu(Y)$。

具体来说，观察

$$Y(\omega_i) = \frac{f(\omega_i)}{p(\omega_i)}.$$

方差最小化的直观策略是使 $Y(\omega_i)$ 尽可能趋于常量，即波动尽可能小。这可以通过令 $p(\omega_i)$ 与 $|f(\omega_i)|$ 成比例来实现。例如，如果选择

$$p(\omega_i) \propto |f(\omega_i)|,$$

则 $\frac{f(\omega_i)}{p(\omega_i)}$ 将近似为一常量 (在理想情况下恰为常量)，从而最小化方差。

在实际应用中，这一思想即为**重要性采样 (Importance Sampling)**。虽然精确选择 $p(\omega_i)$ 为与 $|f(\omega_i)|$ 成比例在很多情况下不可行或成本过高，但人们通常会根据场景中的已知信息或启发式方法设计 p 来接近这一理想分布，从而降低方差，提高蒙特卡洛估计的收敛效率。